ある代数体のイデアル類群のℓ-rankについて (P進L関数と代数体の整数論)

飯村, 清明

数理解析研究所講究録
411巻 1981年 99-108

ある代数体のイデアル類群の ℓ-rank について

都立大 理　　飯村 清明

§0　ℓ : odd prime ; $K/\mathbb{Q}$ は ℓn 次の metacyclic 拡大とする.(i.e ; $Gal(K/\mathbb{Q}) = \langle \sigma, \tau \rangle$; $\sigma^\ell = \tau^n = 1$, $n \mid \ell-1$, $\tau\sigma = \sigma^r\tau$, r は $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times$ における primitive n-th root of 1). さて, $H = \langle \tau \rangle$ とし, $\mathfrak{X} = Hom(H, \mathbb{Z}_\ell^\times)$ とする.

$\psi \in \mathfrak{X}$ を $\tau'^{-1}\sigma\tau' = \sigma^{\psi(\tau')}$ for all $\tau' \in H$ をみたすものとする. H の fixed field を L, $\langle \sigma \rangle$ のそれを F とすれば, $L/\mathbb{Q}$ の the Galois closure が $K = L \cdot F$ となる.(よく知られている様に, $L/\mathbb{Q}$ が ℓ 次 non-Galois 拡大で, その Galois closure K の $\mathbb{Q}$ 上の Galois group が solvable であれば, 必ず $G(K/\mathbb{Q})$ は上のタイプの metacyclic group となる). 一般の代数体 M に対し, S_M で, the ℓ-class group of M を表わし, その ℓ-rank $= \dim_{\mathbb{F}_\ell}(S_M/S_M^{\ell})$ を $\operatorname{rank} S_M$ と書くことにする.

以下の目標は, $\operatorname{rank} S_L$ を Galois action を通して, 考察することである. これまでに知られた結果は次のとおり :

a) $\ell=3$, $n=2$ のとき，$\mathrm{rank}\, S_L$ を計算する algorithm が与えられている．(G. GRAS; F. GERTH III; S. KOBAYASHI.)

b) $n=2$, (i.e. $G(K/\mathbb{Q})$ が 2ℓ 次 dihedral group のとき) $\mathrm{rank}\, S_L$ を $\ell \geq 5$ のときに計算するのは，実際には非常に困難である．しかし，$\mathrm{rank}\, S_L$ の a lower bound, an upper bound は得られている．(G. GRAS; F. GERTH III; S. KOBAYASHI).

c) $G(K/\mathbb{Q})$ が上のタイプの metacyclic の場合にも $\mathrm{rank}\, S_L$ の a lower bound, an upper bound が与えられている．(F. GERTH, III; J-F. JAULENT).

d) 一般の ℓ 次拡大 $L/\mathbb{Q}$ に対して，$\mathrm{rank}\, L$ の a lower bound が得られている．(FRÖHLICH; ISHIDA; ROQUETTE-ZASSENHAUS; ……).

以上の結果と，私たちの結果との関係はあとで述べる．

§1. $\forall \chi \in \mathfrak{X}$ に対して，e_χ を χ に associate した $\mathbb{Z}_\ell[H]$ の idempotent; i.e. $e_\chi := n^{-1} \sum_{\tau' \in H} \chi(\tau'^{-1})\tau$ とする．各 $\mathbb{Z}_\ell[H]$-module N に対して，

$$N^{(\chi)} := N^{e_\chi} := \{n^{e_\chi};\ n \in N\}$$ とすれば，

$N^{(\chi)} = \{n \in N;\ n^\tau = n^{\chi(\tau)}\}$ であって，$N = \prod_{\chi \in \mathfrak{X}} N^{(\chi)}$.

$\chi_0 \in \mathfrak{X}$ を the trivial character とする．$S_L \hookrightarrow S_K$ だから，S_L を S_K に imbed しておけば，$S_L = S_K{}^{(\chi_0)}$ となる．

DEF 1. $\Delta := 1-\sigma$; 各 $1 \leq i \leq \ell-1$ に対して,
$$\mathcal{S}_i := \mathcal{S}_K^{\Delta^{i-1}} \mathcal{S}_K^{\ell} / \mathcal{S}_K^{\Delta^{i}} \mathcal{S}_K^{\ell}$$
とおく. 各 $\mathcal{S}_i$ は $\mathbb{Z}_\ell[G]$-module となる.

LEMMA 1. $\operatorname{rank} \mathcal{S}_L = \sum_{i=1}^{\ell-1} \operatorname{rank} \mathcal{S}_i^{(\chi_0)}$.

LEMMA 2. $\forall \chi \in \mathfrak{X}$, $\forall i \geq 0$ に対して,
$$e_\chi \Delta^i \equiv \Delta^i e_{\chi\psi^i} \pmod{\Delta^{i+1} \mathbb{Z}_\ell[G]}.$$
このLEM. 2から, 次のPROP. 1が得られる.

PROPOSITION 1. $\Lambda_i := \operatorname{Ker}(\Delta^{i-1}: \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_i)$ とおけば, $\forall \chi \in \mathfrak{X}$ に対して,
$$1 \to \Lambda_{i+1}^{(\chi\psi^{1-i})} \xrightarrow{\text{incl}} \mathcal{S}_1^{(\chi\psi^{1-i})} \xrightarrow{\Delta^i} \mathcal{S}_{i+1}^{(\chi\psi)} \to 1 \ (\text{exact})$$
従って, $\operatorname{rank} \mathcal{S}_{i+1}^{(\chi\psi)} = \operatorname{rank} \mathcal{S}_1^{(\chi\psi^{1-i})} - \operatorname{rank} \Lambda_{i+1}^{(\chi\psi^{1-i})}$.

LEM. 1 と PROP. 1 をみれば, $\operatorname{rank} \mathcal{S}_L$ を調べるには, $\mathcal{S}_1^{(\chi)}$, $\Lambda_i^{(\chi)}$, $(\chi \in \mathfrak{X})$, を調べればよいことになる.

(a) $\mathcal{S}_1^{(\chi)}$, $(\chi \in \mathfrak{X})$ についての考察.

次のPROP. 2を使いたい:

PROPOSITION 2. (J-F. JAULENT, 1979.)

$N_{K/F}$ で $\mathcal{S}_K$ から $\mathcal{S}_F$ への the norm map を表わし, $\mathcal{S}_K$ の $\mathbb{Z}_\ell[G]$-submodule $\overline{\mathcal{S}_K}$ を $\overline{\mathcal{S}_K} := \{ s \in \mathcal{S}_K ;\ N_{K/F}\, s = 1 \}$ で定

義すれば，$\forall \chi \in \mathfrak{X}$ に対して，

$$\operatorname{rank}(\bar{S}_K/S_K^{\Delta})^{(\chi)} = \operatorname{rank}(D_a/D_0)^{(\psi^{-1}\chi)} - \operatorname{rank}\mathcal{E}^{(\chi)} - \delta\langle\psi,\chi\rangle.$$

ここに，D_a:= the group of σ-invariant ideals of K;
D_0:= the group of K that are extensions of ideals of F;
$\mathcal{E} := E_F/(E_F \cap N_{K/F}K^\times)$; $E\_$ は，体$_$の unit group;
$\delta := \begin{cases} 1 & \text{if } K/F \text{ is ramified} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$; $\langle\psi,\chi\rangle := \begin{cases} 1 & \text{if } \psi=\chi \\ 0 & \text{if } \psi\neq\chi. \end{cases}$

右辺の項のうちで，$\operatorname{rank}\mathcal{E}^{(\chi)}$ 以外は，すぐ求められるものであることに注意しておく。$\operatorname{rank} S_1^{(\chi)}$ と $\operatorname{rank}(\bar{S}_K/S_K^{\Delta})^{(\chi)}$ との間の関係を調べよう．そのために

$X = (S_K/S_K^{\Delta})^{(\chi)}$, $Y = (\bar{S}_K/S_K^{\Delta})^{(\chi)}$, $Z = (N_{K/F}S_K)^{(\chi)}$ とおく．$\operatorname{rank} S_1^{(\chi)} = \operatorname{rank} X$ に注意する．exact seq

$1 \to Y \to X \xrightarrow{N_{K/F}} Z \to 1$ から

$$\operatorname{rank} X = \operatorname{rank} Z + \operatorname{rank} Y - \operatorname{rank}(Y \cap X^l)$$ をうる．

そこで，$\operatorname{rank}(Y \cap X^l)$ を調べる。t を K/F で完全分岐する F の place $\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_t$ の個数とすれば，$t=0$ or 1 なら $Y=\{1\}$ なので何もすることはないので，$t \geq 2$ と仮定する．各 $1 \leq i \leq t-1$ に対して，$\varphi_i : F^\times \to G(K/F) = \langle\sigma\rangle$ を

$\varphi_i(z) := (z, K/F)_{\mathfrak{p}_i}$ (= the norm residue symbol) として定め，$\varphi = \prod_{i=1}^{t-1}\varphi_i : F^\times \to G(K/F)^{t-1}$ とおく．$W := G(K/F)^{t-1}/\varphi(E_F)$

$P_F :=$ the group of principal ideals of F とすれば，φ は自然に $\varphi' : P_F \to \overline{W}$ を induce し，$\overline{I_K} := \{\mathfrak{a} : \text{ideal of } K,\ N_{K/F}\mathfrak{a} \in P_F\}$ とすれば，$\varphi' \circ N_{K/F} : \overline{I_K} \to \overline{W}$ をうる．

LEMMA 3 (HALTER-KOCH)

$\varphi' \circ N_{K/F}$ は surjective homomorphism であり，自然に isomorphism $\lambda : Y \xrightarrow{\sim} \overline{W}$ を induce する．

LEMMA 4. $S_F^{0} := \{ h \in S_F ; h^{\ell} = 1\}$ とすれば，$Y \cap X^{\ell} = \iota(S_F^{0(X)})S_K^{\wedge}/S_K^{\wedge}$，$\iota : S_F \to S_K$ は inclusion map である．

LEMMAS 3, 4 により，

$\operatorname{rank}(Y \cap X^{\ell}) = \operatorname{rank}\lambda(\iota(S_F^{0(X)}))$ となるが，λ の定義をみれば，$\operatorname{rank}\lambda(\iota(S_F^{0(X)}))$ は，次のように与えられる：$S_F^{0(X)}$ の generators に属する F の ideals を $h_1, \cdots, h_u$ とし，$h_i^{\ell} = (a_i)$；$a_i \in F^{\times}$ とせよ．E_F の generators を $a_{u+1}, \cdots, a_v$ とし，$M^{(X)}$ を $i \times j$ 成分が $(a_i, K/F)_{\mathfrak{g}_j}$ である $v \times (t-1)$ matrix とする．$M^{(X)}$ を自然に F_{ℓ} 上の matrix と考えたとき，$\operatorname{rank}\lambda(\iota(S_F^{0(X)})) = \operatorname{rank}M^{(X)} - \operatorname{rank}\mathcal{E}$；$\mathcal{E} = E_F/(E_F \cap N_{K/F}K^{\times})$．

(b) $\Lambda_i^{(X)}$，$X \in \mathfrak{X}$，$i \geq 1$ に関する考察．

LEMMA 5. $H_i := \operatorname{Ker}(\Delta^i : S_K \to S_K)$ とすれば，

H_i は $\mathbb{Z}_\ell[G]$-module であって，$\forall\chi\in\mathfrak{X}$ に対して

$$\Lambda_i^{(\chi)} = H_{i-1}^{(\chi)} \mathfrak{S}_K^{\Delta} \mathfrak{S}_K^{\ell} / \mathfrak{S}_K^{\Delta} \mathfrak{S}_K^{\ell}$$ であって，

$$\mathrm{rank}\,\Lambda_i^{(\chi)} = \mathrm{rank}\,Y' - \mathrm{rank}\,(Y \cap X^{\ell}) + \mathrm{rank}(Z'/Z^{\ell}),$$

ここに，$Y' := (H_{i-1}^{(\chi)} \cap \overline{\mathfrak{S}_K})\mathfrak{S}_K^{\Delta}/\mathfrak{S}_K^{\Delta}$；$Z' := N_{K/F} H_{i-1}^{(\chi)}$．

従って LEM.3 によれば，

$$\mathrm{rank}\,\Lambda_i^{(\chi)} = \mathrm{rank}\,\lambda\,(H_{i-1}^{(\chi)} \cap \overline{\mathfrak{S}_K}) - \mathrm{rank}\,\lambda\,(\iota(\mathfrak{S}_F^{\circ(\chi)})) + \mathrm{rank}(Z'/Z^{\ell}).$$

$i\geq 3$ に対する $\overbrace{\lambda}^{\mathrm{rank}}(H_{i-1}^{(\chi)} \cap \overline{\mathfrak{S}_K})$ の計算は，$H_{i-1}^{(\chi)} \cap \overline{\mathfrak{S}_K}$ の generators に属する ideals を求めるのが困難なので，非常に難しい．§0 の a) のときには，$i\leq 2$ となるので algorithm が実際使えるのである．

<u>Case $i=2$.</u> LEM.5 によって，$\Lambda_2^{(\psi^{-1})} = H_1^{(\psi^{-1})}\mathfrak{S}_K^{\Delta}\mathfrak{S}_K^{\ell}/\mathfrak{S}_K^{\Delta}\mathfrak{S}_K^{\ell}$．

また PROP.1 によって，$\mathrm{rank}\,\mathfrak{S}_2^{(\chi_0)} = \mathrm{rank}\,\mathfrak{S}_1^{(\psi^{-1})} - \mathrm{rank}\,\Lambda_2^{(\psi^{-1})}$．

<u>LEMMA 6</u> $H_1^{\circ} := \langle cl_K(\mathfrak{p})$；$\mathfrak{p}$ は，K の σ-invariant prime ideal $\rangle \cap \mathfrak{S}_K$，とすれば，$\forall\chi\in\mathfrak{X}$ に対して，

$$H_1^{(\chi)}/H_1^{\circ(\chi)} \simeq \left[(E_F \cap N_{K/F}K^{\times})/N_{K/F}E_K\right]^{(\chi\psi)}.$$

とくに，$H_1^{(\psi^{-1})} = H_1^{\circ(\psi^{-1})}$．

<u>LEMMA 7.</u> $\forall\chi\in\mathfrak{X}$，$\chi\neq\psi^{-1}$ に対して，$\iota(\mathfrak{S}_F^{(\chi)}) \subset \mathfrak{S}_K^{\Delta}\mathfrak{S}_K^{\ell}$．

<u>LEMMA 8.</u> $\mathfrak{S}_1^{(\chi_0)}$ の order は，$L/\mathbb{Q}$ に関する genus number である．すなわち，$\mathrm{rank}\,\mathfrak{S}_1^{(\chi_0)}$ は，F において完全分解し，か

つ L において完全分岐する $\mathbb{Q}$ の places の個数に等しい.

LEMMAS 6-8 及び $\mathrm{rank}\, \mathcal{S}_L \geqq \mathrm{rank}\, \mathcal{S}_1^{(\chi_0)} + \mathrm{rank}\, \mathcal{S}_2^{(\chi_0)}$ に注意すれば, $\mathrm{rank}\, \mathcal{S}_L \geqq \mathrm{rank}\, \mathcal{S}_1^{(\psi^{-1})}$ が得られる.

e.g. $\ell \geqq 5$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt[\ell]{m})$, $m \in \mathbb{Z}$, m は ℓ^{th} powerfree.

とすれば, $\mathrm{rank}\, \mathcal{E}^{(\psi^{-1})} = 0$ なので,

$$\mathrm{rank}\, \mathcal{S}_L \geqq \#\{p : \text{rational prime} \equiv \pm 1\ (\ell),\ p \mid m\}$$
$$+ \mathrm{rank}\, \mathcal{S}_F^{0(\psi^{-1})} - \mathrm{rank}\, \lambda(L(\mathcal{S}_F^{0(\psi^{-1})}))$$
$$\geqq \#\{p : \text{rational prime} \equiv \pm 1(\ell),\ p \mid m\}.$$

§3. $W_i := H_1 \mathcal{S}_K^{\Delta^i} \mathcal{S}_K^{\ell} / \mathcal{S}_K^{\Delta^i} \mathcal{S}_K^{\ell}$ とおけば, LEM. 2 により. $1 \to W_i^{(\chi)} \xrightarrow{\text{incl.}} \mathcal{S}_i^{(\chi)} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{S}_{i+1}^{(\chi\psi)} \to 1$ は, $\forall \chi \in \mathcal{X}$ に対して, exact である. そこで, $2 \leqq i \leqq \ell - 1$ なる i に対して. $\tilde{\mathcal{S}}_i := \mathcal{S}_K / \mathcal{S}_K^{\Delta^i} \mathcal{S}_K^{\ell}$ とおけば,

$$\mathrm{rank}\, \tilde{\mathcal{S}}_i = \sum_{j=1}^{i} \mathrm{rank}\, \mathcal{S}_j^{(\chi\psi^{j-i})} - \sum_{j=1}^{i-1} W_j^{(\chi\psi^{j-i})}$$ をうる.

これより, 次の Th. 1 を得る.

<u>THEOREM 1</u> $\quad \mathrm{rank}\, \mathcal{S}_L \leqq (\ell-1) n^{-1} \cdot \mathrm{rank}\, \mathcal{S}_1$.

<u>REMARK</u>. §0. b), c) で得られている $\mathrm{rank}\, \mathcal{S}_L$ の the upper bound は. $(\ell-1) n^{-1} \cdot \mathrm{rank}(H_1 \cap \overline{\mathcal{S}_K})$ である. $\mathrm{rank}(H_1 \cap \overline{\mathcal{S}_K})$ は. $\mathrm{rank}(\overline{\mathcal{S}_K}/\mathcal{S}_K^{\Delta}) + \mathrm{rank}\, \mathcal{S}_F - \mathrm{rank}(N_{K/F} H_1 / \mathcal{S}_F^{\ell})$ に等しい.
私たちの得た the upper bound における $\mathrm{rank}\, \mathcal{S}_1$, と $\mathrm{rank}(H_1 \cap \overline{\mathcal{S}_K})$ と

の差は次のとおり： K/F が unramified であれば，
$\operatorname{rank} S_1 \geq \operatorname{rank}(H_1 \cap \overline{S_K})$；ramified であれば，
$\operatorname{rank} S_1 - \operatorname{rank}(H_1 \cap \overline{S_K}) = \operatorname{rank}(N_{K/F}H_1/S_F{}^{\ell})$
$-\operatorname{rank} \lambda(\iota(S_F^0))$. とくに $S_F = \{1\}$ であれば，
上の2つの bounds は一致してしまう．

次に，$\operatorname{rank} S_L$ の a lower bound を与えよう．$1 \leq j \leq \ell-2$ なる j に対しては，

$$W_j{}^{(4^j)} \simeq H_1{}^{(4^j)}/(H_1{}^{(4^j)} \cap S_K{}^{\Delta^j} S_K{}^{\ell})$$

であって，$S_K{}^{\Delta^j} S_K{}^{\ell} = S_K{}^{\Delta^j} \iota(Z')$, $Z' = N_{K/F} S_K$.
に注意すれば，K/F が ramified のときには，$\forall j$；$1 \leq j \leq \ell-2$ に対して，

$$\operatorname{rank} W_j{}^{(4^j)} \leq \operatorname{rank} C^{(4^j)} + \operatorname{rank}\left(E_F \cap N_{K/F}K^{\times}/N_{K/F}E_K\right)^{4^{1+j}}$$

を得る．ここに，$C := \langle Cl_K(\mathfrak{p})^c$；$\mathfrak{p}$ は F で完全分岐する K の prime ideal $\rangle$, $c :=$ C_F/S_F の order, C_F は，F の ideal class group．そのとき，次の Th. 2 を得る．

<u>THEOREM 2</u> K/F が ramified であれば，

$$\operatorname{rank} S_L \geq \operatorname{rank} H_1{}^{0(x_0)} + \operatorname{rank} S_1 - \operatorname{rank} C - \operatorname{rank}\left(E_F \cap N_{K/F}K^{\times}/N_{K/F}E_K\right).$$

<u>REMARK</u>. $\operatorname{rank} S_L \geq \operatorname{rank} H_1{}^{0(x_0)}$ は，明らかに成り立つ不等式である．§0. c) で GERTH の与えた the lower bound は，

rank $H_1^{0(X_0)}$であり，d) で与えられた lower bound は，$H_1^{(X_0)}$ のある subgroup の rank の lower bound である．

この Prop. 4 の意義は，次のとおり：大ざっぱに評価して，

$$\operatorname{rank} \mathcal{S}_1 - \operatorname{rank} C - \operatorname{rank}(E_F \cap N_{K/F}K^\times / N_{K/F}E_K)$$

$$\geq \operatorname{rank} \mathcal{S}_F - \operatorname{rank} C - \operatorname{rank}(E_F \cap N_{K/F}K^\times / N_{K/F}E_K)$$

であるから，rank $\mathcal{S}_F$ が，rank C に比較して，ある程度大きければ，rank $\mathcal{S}_L$ は，rank $\mathcal{S}_F$ と共に大きくなる，すなわち，rank $\mathcal{S}_L$ に rank $\mathcal{S}_F$ が関与している — この事実は，すでに $l=3$，$n=2$ の場合に顕著であった．すなわち，K/F が unramified であれば（但し，$l=3$ かつ $n=2$ とする．）

rank $\mathcal{S}_L$ = rank $\mathcal{S}_F - 1$; K/F において分岐する F の prime がただ1つであれば，rank $\mathcal{S}_L$ = rank $\mathcal{S}_F$（G. GRAS; F. GERTH III）．

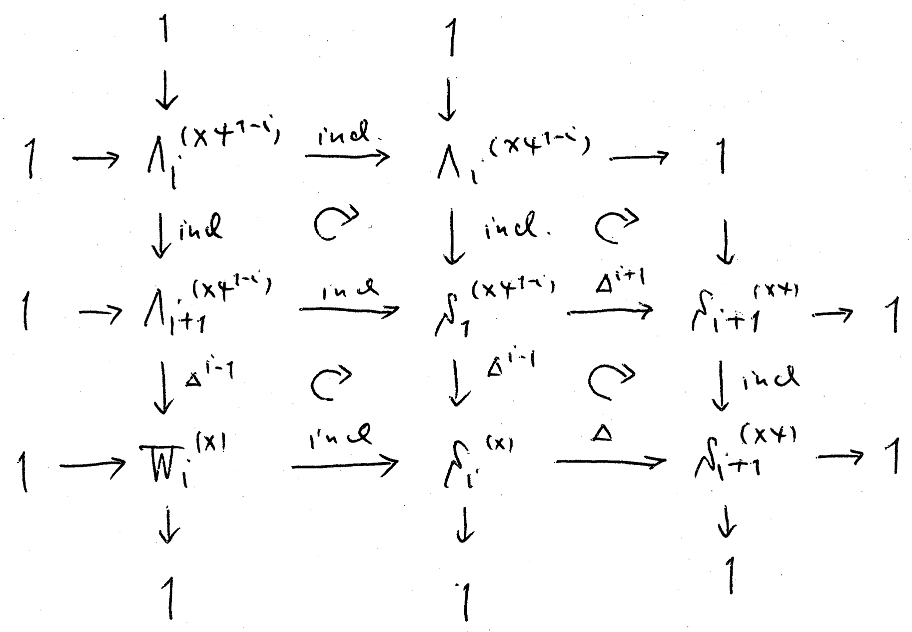
<u>THEOREM 3.</u> K/F が unramified であれば，

$$\operatorname{rank} \mathcal{S}_L \geq (l-1)n^{-1} \cdot (\operatorname{rank} \mathcal{S}_F' - d - 1) + \operatorname{rank} H_1^{(X_0)}.$$

ここに，$\operatorname{rank} \mathcal{S}_F' = \operatorname{rank}(N_{K/F}\mathcal{S}_K) = \begin{cases} \operatorname{rank} \mathcal{S}_F, \text{ or} \\ \operatorname{rank} \mathcal{S}_F - 1. \end{cases}$

$d = \operatorname{rank}(E_F / N_{K/F}E_K)$.

§4. $\mathcal{S}_i^{(X)}$，$\Lambda_i^{(X)}$，$\overline{W}_i^{(X)}$，$X \in \mathfrak{X}$，$1 \leq i \leq l-1$，達の間の関係は次のとおりである．（seq. 達は，すべて exact である）



$$
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & \Lambda_i^{(\chi\omega^{1-i})} \arrow[r, "\mathrm{incl.}"] \arrow[d, "\mathrm{incl}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \Lambda_i^{(\chi\omega^{1-i})} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{incl.}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & 1 \arrow[d] \\
1 \arrow[r] & \Lambda_{i+1}^{(\chi\omega^{1-i})} \arrow[r, "\mathrm{incl}"] \arrow[d, "\Delta^{i-1}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{S}_i^{(\chi\omega^{1-i})} \arrow[r, "\Delta^{i+1}"] \arrow[d, "\Delta^{i-1}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{S}_{i+1}^{(\chi\omega)} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{incl}"] & 1 \\
1 \arrow[r] & W_i^{(\chi)} \arrow[r, "\mathrm{incl}"] \arrow[d] & \mathcal{S}_i^{(\chi)} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d] & \mathcal{S}_{i+1}^{(\chi\omega)} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 &
\end{tikzcd}
$$

REFERENCES.（主なものに限る.）

F. GERTH. III; Mathematika 23 (1976), Acta. Arith. 30. No. 4 (1977), etc

G. GRAS, Séminaire de Théorie des Nombres. Besançon (1974-5), J. Math. Soc. Japan 26, NO. 4 (1974), etc.

HALTER-KOCH, J. Number Theory 4 (1972), 144-156; J. für die reine und ang. Math. 301 (1978), etc. 147-160.

M. ISHIDA; Springer Lecture Notes. 555

J-F. JAULENT: Besanson大における Thése (1979).

S. KOBAYASHI; J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA, 20 (1973), etc: J. Math. Soc. Japan 26, NO. 4 (1974).

ROQUETTE-ZASSENHAUS; J. London Math. Soc. 44 (1969)

K. IIMURA; Acta. Arith. 35. No. 4 (1979).